EL PERISCOPIO MATEMÁTICO DEL INSTITUTO

http://www.nunezdearce.es/

AUTORES DEL TRABAJO: **GRUPO PERISCOPIO**

Formado por los alumnos de 2º E.S.O. del **I.E.S. NÚÑEZ DE ARCE** (Valladolid):

- **Beatriz Fernández-Samos Puente**
- **Jacobo Martín Sanz**
- **Laura Ortega Picón**

Coordinado por la profesora: Inmaculada Fernández Benito

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Alumnos y profesores, cuando diariamente acudimos al instituto, nos "sumergimos" en sus rutinas –clases, apuntes, preguntas, controles y exámenes, charlas de pasillo con los colegas, cambio de ritmo en el recreo, etc.- y, con frecuencia, olvidamos lo que hay fuera, terminamos nuestra jornada y nos vamos a casa pensando en nuestras cosas. Por eso, nosotros hemos querido, metafóricamente al menos, sacar el periscopio y, movidos por inquietudes y aficiones matemáticas, utilizarlo como hacen en los submarinos: para mirar alrededor, para observar matemáticamente en nuestro inmediato entorno las numerosas configuraciones que nos rodean y junto a las que pasamos inadvertidamente cada día. Al fin y al cabo, eso es lo que magistralmente nos dejó dicho Galileo Galilei cuando afirmó que "El universo está escrito en lenguaje matemático, y son sus caracteres círculos, triángulos y otras formas…" Demostrar la veracidad de esta frase, fue uno de los motivos por los que decidimos hacer la pequeña investigación en que se apoya este trabajo.

El *"universo"* es muy grande, así que para centrar la búsqueda matemática decidimos particularizar nuestro universo a los alrededores del Instituto "Núñez de Arce" de Valladolid , donde estudiamos 2º de ESO.

Para observar todos los detalles con detenimiento, sin que nada escapara a nuestra mirada, necesitábamos utilizar un buen periscopio, que saliera desde el interior del Instituto hasta el exterior y nos permitiera descifrar el "*lenguaje de las matemáticas"* en que están escritas muchas cosas del entorno inmediato.

Por todo ello elegimos como título del presente trabajo: **EL PERISCOPIO MATEMÁTICO DEL INSTITUTO**.

VISTAZO 1 – NÚMEROS CUADRADOS EN ACERAS [a] [b]

En las aceras de Valladolid y de otras ciudades, se ven baldosas que, en los pasos de peatones, marcan con pequeños abultamientos los lugares para cruzar, El número de estos abultamientos o puntos es: 16, 25, 36, ó incluso 100. Sabemos que en Madrid hay baldosas con 400 puntos, ¡para eso es la capital!

Todos estos números son ***números cuadrados***.

Los griegos representaban los números mediante guijarros colocados sobre una superficie o con puntos dibujados sobre un pergamino.

Para los pitagóricos, el hecho de simbolizar el número con una figura, sin utilizar símbolos, era el ideal de la matemática como lenguaje universal [4].

Cuando la disposición de las pequeñas piedras o puntos resultaba ser un cuadrado, el número recibía el nombre de cuadrado, si se formaba un triángulo, se llamaba triangular, etc.

Los números cuadrados son los cuadrados de los números naturales y también los que tienen por raíz cuadrada un número entero.

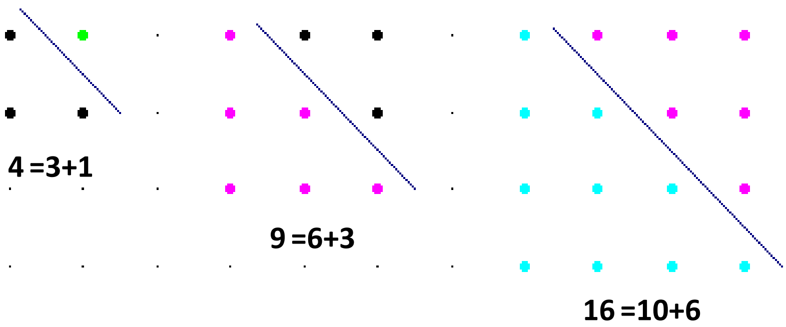
$$1=1^2,\quad 4=2^2,\quad 9=3^2,\quad 16=4^2,\quad 25=5^2,\ \ldots.\ n^2,\ \ldots.$$

$$\sqrt{1}=1,\quad \sqrt{4}=2,\quad \sqrt{9}=3,\quad \sqrt{16}=4,\quad \sqrt{25}=5,\ \ldots.\ \sqrt{n^2}=n,\ \ldots.$$

[4] García del Cid, L. *La sonrisa de Pitágoras*. DeBOLS!LLO, 2007.

En la foto se ve la descomposición del número cuadrado 16 en suma de los números triangulares 10 piedras (claras) y 6 piedras (oscuras).

El esquema representa la formación del segundo, tercer y cuarto número cuadrado (4, 9 y 16) como suma de dos de los cuatro primeros números triangulares (1, 3, 6 y 10).



B) El cuadrado de un número par es par y el cuadrado de un número impar es impar. Esto es fácil de demostrar sabiendo que un número par tiene en su descomposición factorial el número dos, es decir se escribe como $2\cdot k$. El siguiente número de uno par es impar, por lo que se escribe: $2\cdot k+1$.

Al elevarlos al cuadrado se obtiene:

$(2\cdot k)^2 = 4\cdot k^2 = 2\cdot(2\cdot k^2)$, que es par por ser múltiplo de dos.

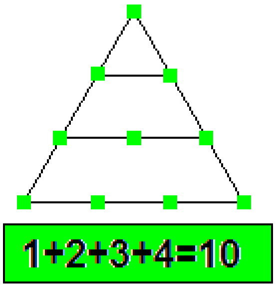
$(2\cdot k+1)^2 = 4\cdot k^2 + 2\cdot 2\cdot k + 1 = 4\cdot k^2 + 4\cdot k + 1 = 2\cdot(2\cdot k^2 + 2\cdot k) + 1$, que es impar por ser el siguiente de un número par.

C) Los números cuadrados se forman como suma de números impares consecutivos empezando por el uno.

$1,\quad 4=1+3,\quad 9=1+3+5,\quad 16=1+3+5+7,\ldots$

En la foto se observa cómo hemos colocado las piedras, alternando las claras y las oscuras para formar el número cuadrado $25=1+3+5+7$.

No hemos podido encontrar representaciones de algún número triangular como las de los números cuadrados de las aceras, pero sí hemos encontrado una disposición de 10 puntos en la tapa de una alcantarilla. Este número triangular era considerado por los pitagóricos el número perfecto, por ser la suma de los cuatro primeros números que simbolizaban las dimensiones. [5]



En las calles que rodean el instituto, además de las baldosas con abultamientos, hay otras lisas que están colocadas alternando los colores y formando cuadrados de: 1, 4, 9, 16, 25, … baldosas.

En la parte izquierda de la fotografía, **1** baldosa clara está rodeada de 8 oscuras y forman el número cuadrado **9**. En la parte derecha, **4** baldosas claras están rodeadas por 12 más oscuras y forman el número cuadrado **16**.

De estas observaciones hemos sacado las siguientes conclusiones:

- Partimos de un número impar n y bordeamos el cuadrado de n^2 baldosas con 4 baldosas en las esquinas y n baldosas colocadas en cada uno de los cuatro lados del cuadrado, de esta forma obtenemos un nuevo cuadrado que tiene $(n+2)^2$ baldosas, es decir: el número cuadrado que resulta de elevar al cuadro el siguiente número impar de n que es $n+2$.

  Por ejemplo si $n=1$, $n+2=3$ (fotografía izquierda), $1^2+4+4\cdot 1=9=3^2$.

[5] González Urbaneja, P.M. *Pitágoras el filósofo del número*. Nivola, 2001.

- Partimos de un número par n y bordeamos el cuadrado de n^2 baldosas con 4 baldosas en las esquinas y n baldosas colocadas en cada uno de los cuatro lados del cuadrado, de esta forma obtenemos un nuevo cuadrado que tiene $(n+2)^2$ baldosas, es decir: el número cuadrado que resulta de elevar al cuadro el siguiente número par de n que es $n+2$.

  Por ejemplo si $n=2$, $n+2=4$ (fotografía derecha), $2^2+4+4\cdot 2=16=4^2$

  En general, se cumple la siguiente igualdad que relaciona los cuadrados de n y $n+2$:

  $n^2+4+4\cdot n=n^2+4\cdot n+4=(n+2)^2$.

El logotipo de un edificio público (VIVA) cercano al instituto presenta también el número cuadrado $36=6^2$

En las aceras de otras calles de Valladolid hemos encontrado números cuadrados como los dos modelos que hemos detallado antes.

$10^2=100$

$4^2+4\cdot 4+4=(4+2)^2=6^2=36$

MATEMÁTICAS UTILIZADAS

- Números poligonales: cuadrados y triangulares.
- Teorías pitagóricas sobre números.
- Expresiones de los números pares e impares.
- Operaciones con monomios.
- Productos notables.

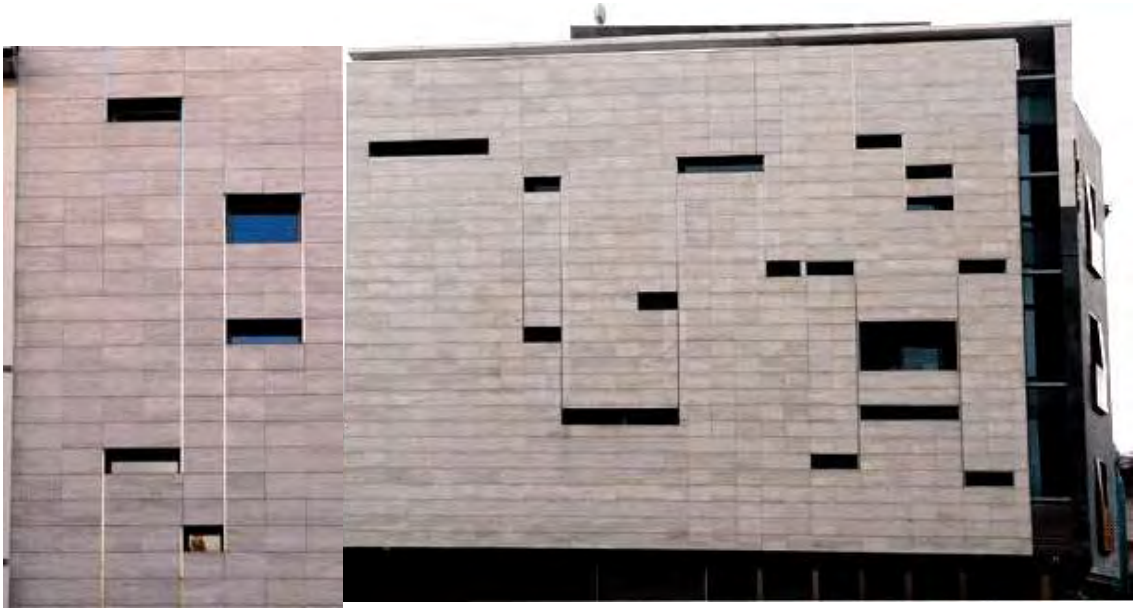
VISTAZO 2 – RECTÁNGULOS EN MUROS [c] [d]

En varios edificios que rodean el instituto hay muchos rectángulos de tamaños diferentes; para compararlos y clasificarlos según su forma, hemos calculado el cociente entre el lado mayor y el menor, con lo que podemos comprobar si tienen las mismas proporciones aunque tengan diferentes tamaños.

La proporción p de un rectángulo es el cociente de dividir la longitud de su lado mayor a entre la del menor b es $p = \frac{a}{b}$

Estudio de proporciones en:

A) EDIFICIO "VIVA" (Sociedad Municipal de Suelo y Vivienda de Valladolid, S.L.)



Este moderno edificio, inaugurado en 2006, se utiliza para oficinas del Ayuntamiento de Valladolid y Oficina de Información al Ciudadano. Está situado muy cerca del instituto y podemos avistarlo con nuestro periscopio, en la plaza del Rinconada y al lado del mercado del Val. [e]

Las ventanas rectangulares de este edificio son inaccesibles desde el exterior, así que para obtener sus dimensiones medimos una baldosa y contamos cuántas baldosas ocupaba cada ventana. La baldosa tampoco se podía medir directamente, por lo que tuvimos que recurrir a compararla con otras accesibles, pero de tamaño diferente, de la parte inferior del edificio y a utilizar dos varillas con longitud de un metro. El resultado fue el siguiente: MEDIDA DE UNA BALDOSA 60,5 cm de largo y 52 cm de alto.

En la siguiente tabla están todos los datos y los cálculos realizados para hallar la proporción de los rectángulos de las ventanas.

	Nº de baldosas quitadas	Disposición de las baldosas *largo x alto*	Medida del rectángulo *base x altura*	Proporción del rectángulo
VENTANA 1	1	1 x 1	60 x 52	$p_1 = \frac{60}{52} = \frac{15}{13} = 1{,}15...$
VENTANA 2	2	2 x 1	120 x 52	$p_2 = \frac{120}{52} = \frac{30}{13} = 2{,}30...$
VENTANA 3	3	3 x 1	180 x 52	$p_3 = \frac{180}{52} = \frac{45}{13} = 3{,}46...$
VENTANA 4	4	4 x 1	240 x 52	$p_4 = \frac{240}{52} = \frac{60}{13} = 4{,}61...$
VENTANA 5	5	5 x 1	300 x 52	$p_6 = \frac{300}{52} = \frac{75}{13} = 5{,}77...$
VENTANA 6	4	2 x 2	120 x 104	$p_5 = \frac{120}{104} = \frac{15}{13} = 1{,}15...$
VENTANA 7	12	4 x 3	240 x 156	$p_7 = \frac{240}{156} = \frac{20}{13} = 1{,}54...$

Las proporciones de todos los rectángulos son números racionales que hemos expresado como fracciones con denominador 13, al ser este un número primo que no se puede descomponer en producto de potencias de 2 y 5, las expresiones decimales obtenidas son periódicas.

Al comparar las proporciones de las ventanas vemos que la 1 y la 6 tienen la misma proporción, porque la base y la altura de la segunda son el doble que la base y la altura de la primera ($p_6 = p_1$).

También hay relación entre las proporciones de las ventanas 2, 3, 4 y 5 con la de la ventana 1, porque: $p_2 = 2 \cdot p_1$, $p_3 = 3 \cdot p_1$, $p_4 = 4 \cdot p_1$ y $p_5 = 5 \cdot p_1$.

Utilizando estas igualdades aparecen otras relaciones entre las proporciones de las ventanas 2, 3, 4 y 5: $p_3 = \frac{3}{2} \cdot p_2$, $p_4 = 2 \cdot p_2 = \frac{4}{3} \cdot p_3$ y $p_5 = \frac{5}{2} \cdot p_2 = \frac{5}{3} \cdot p_3 = \frac{5}{4} \cdot p_4$.

En el caso de la ventana 7, la diferencia es que su proporción p_7, en vez de ser un número entero de veces la proporción p_1, es una fracción: $p_7 = \frac{4}{3} \cdot p_1$.

B) EDIFICIO MUSEO PATIO HERRERIANO

Este edificio, inagurado en 2002, es una restauración y ampliación de un antiguo monasterio y está situado en un lateral del instituto. Las formas y materiales utilizados por sus arquitectos son muy acertados porque respetan la estructura del antiguo edificio y a la vez le dan un aspecto muy actual y moderno, acorde con el edificio de nuestro instituto, diseñado por el arquitecto Fisac en 1961. [f]

De todos los rectángulos que hay en el exterior de este edificio, nos hemos fijado en los que están formados por cuadrados, porque para calcular su proporción no necesitamos saber la medida exacta. La explicación es la siguiente: si el lado del cuadrado mide x, y el lado mayor del cuadrado tiene a cuadrados y el menor b, la proporción del rectángulo es:

$p = \frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$, es decir sólo tenemos que dividir el número de cuadrados que tiene el lado mayor entre los que tiene el menor.

Utilizando esto, la pared del edificio donde está el restaurante del museo tiene 11,5 cuadrados de largo y 6 de alto, por lo que su proporción es: $p = \frac{11,5}{6} = \frac{115}{60} = \frac{23}{12} = 1,92...$

En la parte restaurada del antiguo monasterio han colocado puertas de madera cuyas partes centrales son también rectángulos formados por cuadrados, bordeados por marcos rectangulares.



La colocación de los cuadrados en los rectángulos y por lo tanto sus proporciones son:

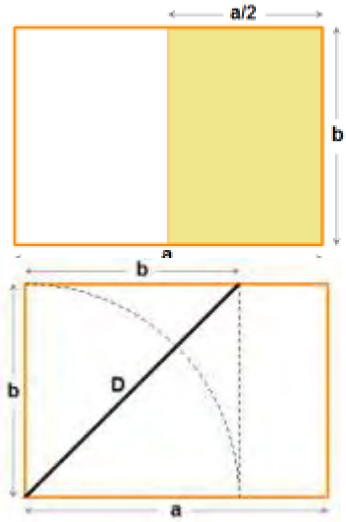
PUERTA 1		PUERTA 2		PUERTA 3	
Cuadrados	4 x 8	Cuadrados	3 x 11	Cuadrados	4 x 9
Proporción	$p_1 = \frac{8}{4} = 2$	Proporción	$p_2 = \frac{11}{3} = 3,\widehat{6}$	Proporción	$p_3 = \frac{9}{4} = 2,25$

Las tres proporciones son números racionales, pero de distintos tipos. El primero (2) es un número entero, y el rectángulo que tiene esta proporción se llama *rectángulo duplo*; el segundo ($3,\widehat{6}$) es un número decimal periódico puro y el tercero ($2,25$) es un número decimal exacto.

En la calle Jorge Guillén, una de las que rodean nuestro instituto, cerca de donde está la entrada principal del Museo Patio Herreriano, hay una puerta de bar que tiene la misma estructura que las puertas anteriores, es decir, es un rectángulo formado por cuadrados.

Como se ve en la fotografía el rectángulo está dividido en 27 cuadrados colocados en 3 columnas y 4 filas, por lo que su proporción es: $p = \frac{9}{3} = 3$, un número entero.

C) FORMATO DE PAPEL DIN A-4



Las proporciones de todos los rectángulos anteriores y otros más que hemos medido nos han dado números racionales, por lo que queríamos buscar algún rectángulo con proporción irracional y por eso hemos pensado en el rectángulo que siempre estamos utilizando, la hoja de papel DIN A-4. Sus medidas son 297 mm x 210 mm y al hacer la división queda que la proporción es $\frac{297}{210} = 1{,}414... = \sqrt{2}$. [2]

Los formatos de papel DIN A-4, el DIN A-3, o el DIN A-2 que utilizamos para carteles, son todos rectángulos de proporción $p_1 = \frac{a}{b} = \sqrt{2}$, y de aquí sacamos que la relación entre a y b es $a = b\sqrt{2}$.

Además cada uno de los dos rectángulos que se obtienen al cortar una de estas hojas, por la mitad, tiene también la misma proporción. Esto lo hemos demostrado así:

$$p_2 = \frac{b}{\frac{a}{2}} = \frac{2b}{a} = \frac{2b}{\sqrt{2}\,b} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Para llegar al valor final hemos sustituido a por $b\sqrt{2}$, hemos simplificado y amplificado fracciones y también hemos aplicado el hecho de que la raíz cuadrada de un número al cuadrado es el mismo número.

Otra propiedad muy curiosa de todos los formatos DIN A es que la diagonal del cuadrado de lado b (lado menor de la hoja) mide a (lado mayor de la hoja). Se demuestra aplicando el Teorema de Pitágoras [g] en el triángulo rectángulo isósceles para calcular D.

$D^2 = b^2 + b^2 = 2b^2$ y $\boxed{D = b\sqrt{2} = a}$

MATEMÁTICAS UTILIZADAS

- Proporción de un rectángulo.
- Clasificación de los números racionales.
- Expresión decimal y fraccionaria de números racionales.
- Fracciones equivalentes. Simplificación y amplificación de fracciones.
- Raíces cuadradas.
- Teorema de Pitágoras.

[2] Fernández, I., Reyes, E. *Geometría con el hexágono y el octógono*. Proyecto Sur de Ediciones, 2003.

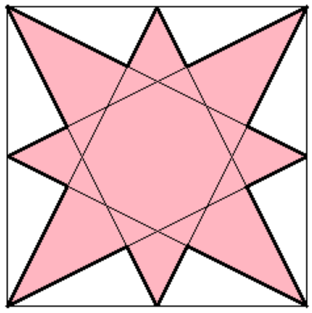
VISTAZO 3 – ESTRELLA DE BRUNES EN PARTERRE Y PLACA

A) ESTRELA EN PARTERRE

En el jardín de entrada al Museo Patio Herreriano hay un parterre con forma de estrella de ocho puntas, cuatro de las cuales tienen marcados los puntos cardinales N, S, E y W.

La estrella de ocho puntas en las que se marcan los rumbos de los vientos se llama rosa de los vientos o rosa náutica. h

El diseño de la estrella del parterre se puede hacer a partir de un cuadrado, trazando segmentos que unan los puntos medios de los lados, con los vértices del lado opuesto y construyendo un polígono cóncavo de 16 lados sobre los segmentos.



Esta figura aparece en la obra "The secrets of Ancient geometry" (1967), del ingeniero danés Tons Brunes, y por eso se conoce como *"estrella de Brunes"*. Según sus investigaciones, la enigmática estrella formaba parte de los sistemas geométricos utilizados en las construcciones de la Edad Antigua. [1]

Como actividad matemática sobre la estrella del jardín, decidimos calcular su área y perímetro, para ello medimos la distancia entre dos puntas que serían los vértices de un cuadrado imaginario. El resultado fue el siguiente: LADO DEL CUADRADO 2,50 m.

Con este único dato dibujamos, con ayuda del programa CABRI-GEOMETRE, una estrella de Burnes, a partir de un cuadrado de $10\ \text{cm}$ de lado.

En esta construcción el área y el perímetro de la estrella dibujada se pueden calcular directamente pinchando en el menú las opciones "Área" y "Longitud de polígono", los valores que se obtienen son: $60\,\text{cm}^2$ y $53{,}67\ \text{cm}$. Con estos datos y aplicando el resultado enmarcado más abajo, podemos calcular el área y el perímetro de la estrella del jardín.

[1] Chamoso, J., Fernández, I., Reyes, E. *Burbujas de Arte y Matemáticas*. Nivola, 2009.

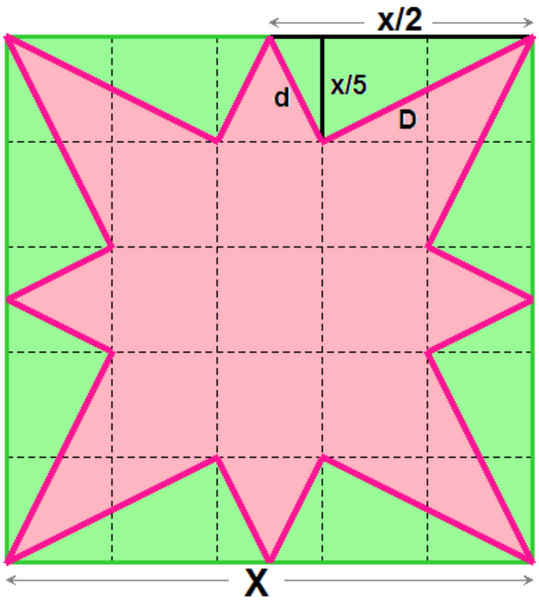
Si dos polígonos son semejantes y la proporción entre sus lados es k, la proporción entre sus áreas es k^2.

Utilizamos que la proporción entre los lados de la estrella del jardín y de la dibujada es:

$$k=\frac{2{,}5\,\text{m}}{10\,\text{cm}}=\frac{250}{10}=25,\ \ k^2=625.$$

Calculamos el área de la estrella real multiplicando el área de la dibujada por 625, nos da: $625\cdot 60=37500\,\text{cm}^2=3{,}75\,\text{m}^2$.

Calculamos el perímetro de la estrella real multiplicando el perímetro de la dibujada por 25, nos da: $25\cdot 53{,}67=1341{,}75\,\text{cm}=13{,}42\,\text{m}$.



COMPROBACIÓN:
Cálculo directo del área y perímetro de la estrella con el programa CABRI
Para el lado del cuadrado x=10

ÁREA ESTRELLA = 60,00 cm^2
PERÍMETRO ESTRELLA = 53,67 cm

Observando la figura, vemos que al trazar los segmentos para dibujar la estrella se produce una división de los lados del cuadrado en cinco partes iguales. Se ve que si el lado del cuadrado mide x, el área de la estrella se puede calcular restando al área del cuadrado el área de ocho triángulos de base $\frac{x}{2}$ y de altura $\frac{x}{5}$.

Nos queda: $$A=x^2-8\cdot\frac{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{5}}{2}=x^2-8\cdot\frac{x^2}{20}=x^2-\frac{2x^2}{5}=\frac{3x^2}{5}.$$

En esta fórmula, al sustituir el valor del lado del cuadrado obtenemos el área de cualquier estrella de Brunes.

Si $x = 10\,\text{cm}$. $A = \dfrac{3 \cdot 10^2}{5} = \dfrac{300}{5} = 60\ \text{cm}^2$ es el área de la estrella dibujada.

Si $x = 2{,}5\,\text{m}$. $A = \dfrac{3 \cdot 2{,}5^2}{5} = \dfrac{18{,}75}{5} = 3{,}75\ \text{m}^2$ es el área de la estrella del jardín.

El perímetro de la estrella se calcula como suma de las medidas de los 16 lados del polígono. Ocho de estos lados son hipotenusas de triángulos rectángulos de catetos $\dfrac{x}{5}$ y $\dfrac{x}{10}$; y los otros ocho lados son hipotenusas de triángulos rectángulos de catetos $\dfrac{2x}{5}$ y $\dfrac{x}{5}$. Para calcularlos se utiliza el Teorema de Pitágoras en estos dos triángulos rectángulos:

$$d = \sqrt{\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{x}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{25} + \frac{x^2}{100}} = \sqrt{\frac{4x^2}{100} + \frac{x^2}{100}} = \sqrt{\frac{5x^2}{100}} = \frac{\sqrt{x^2}\,\sqrt{5}}{\sqrt{100}} = \frac{x \cdot \sqrt{5}}{10}.$$

$$D = \sqrt{\left(\frac{2x}{5}\right)^2 + \left(\frac{x}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4x^2}{25} + \frac{x^2}{25}} = \sqrt{\frac{5x^2}{25}} == \frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{x \cdot \sqrt{5}}{5}.$$

El resultado final del perímetro de cualquier estrella de Brunes es:

$$\boxed{P = 8 \cdot \frac{x \cdot \sqrt{5}}{10} + 8 \cdot \frac{x \cdot \sqrt{5}}{5} = \frac{4 \cdot x \cdot \sqrt{5}}{5} + \frac{8 \cdot x \cdot \sqrt{5}}{5} = \frac{12 \cdot x \cdot \sqrt{5}}{5}}.$$

En particular, si aplicamos esta fórmula para:

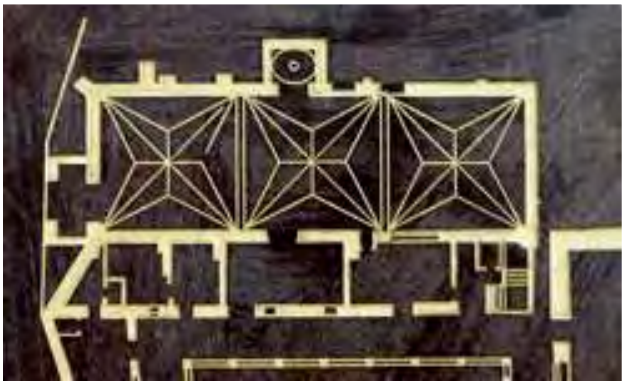
$x = 10$ cm. $P = \dfrac{12 \cdot 10 \cdot \sqrt{5}}{5} = 53{,}66\,\text{m}$ que coincide con el perímetro de la estrella dibujada, obtenido anteriormente.

$x = 2{,}5$ m. $P = \dfrac{12 \cdot 2{,}5 \cdot \sqrt{5}}{5} = 13{,}42\,\text{m}$ que coincide con el perímetro de la estrella del jardín, obtenido anteriormente.

B) ESTRELLA EN PLACA [i]

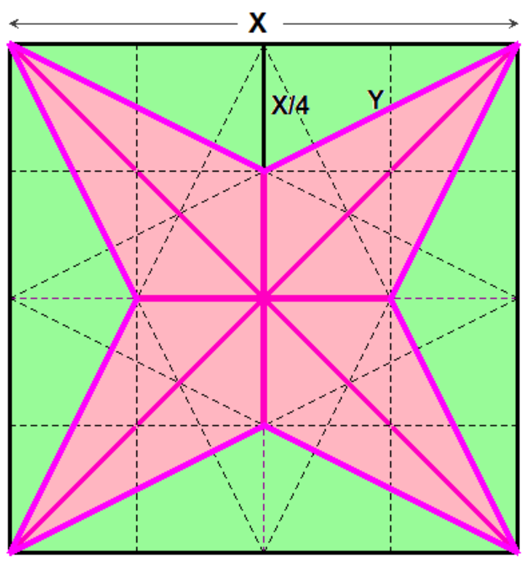
Enfrente del Museo Patio Herreriano y muy cerca del Instituto, en la calle Encarnación, está el convento de Santa Isabel. En la puerta de este edificio, como en todos los de interés turístico de Valladolid, hay una placa informativa con forma de parábola (Según nos ha dicho la profesora, esto lo estudiaremos en los siguientes cursos).

Lo que nos ha llamado la atención son las estrellas de cuatro puntas que hay en el esquema del plano del convento. Para dibujar estas nuevas estrellas hemos utilizado los segmentos de la estrella de Brunes y las diagonales del cuadrado.



Hemos seguido con la misma idea de calcular el área de la estrella siguiendo los métodos del caso anterior, es decir:

- Realizar un dibujo con CABRI-GEOMETRE tomando el cuadrado de lado $10\ \text{cm}$ y calcular el área y perímetro de la estrella con las opciones "Área"y "Longitud de polígono", del programa. El resultado es $50\ \text{cm}^2$ y $44{,}72\ \text{cm}$.



COMPROBACIÓN:

Cálculo del área y perímetro de la estrella con el programa CABRI
Para el cuadrado de lado x = 10

ÁREA ESTRELLA = 50,00 cm^2
PERÍMETRO ESTRELLA = 44,72 cm

- Observar una nueva división del lado del cuadrado en cuatro partes iguales.
- Tomar un cuadrado de lado x.
- Calcular el área de la estrella restando del área del cuadrado la de cuatro triángulos de base x y altura $\frac{x}{4}$. $A = x^2 - 4\cdot\frac{x\cdot\frac{x}{4}}{2} = x^2 - 4\cdot\frac{x^2}{8} = x^2 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$.

  Aplicando esta fórmula para $x = 10$, nos sale el mismo resultado del área de la estrella:

  $A = \frac{10^2}{2} = \frac{100}{2} = 50\ \text{cm}^2$.

- Calcular el perímetro de la estrella multiplicando por ocho la longitud de la hipotenusa (marcada por Y en el dibujo) de un triángulo rectángulo de catetos $\frac{x}{2}$ y $\frac{x}{4}$. Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$Y=\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{16}}=\sqrt{\frac{5x^2}{16}}==\frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{16}}=\frac{x\cdot\sqrt{5}}{4}$$

El resultado final es: $P=8\cdot\frac{x\cdot\sqrt{5}}{4}=2\cdot x\cdot\sqrt{5}$.

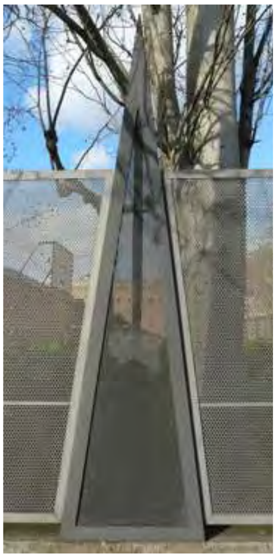
Para $x=10$ obtenemos:

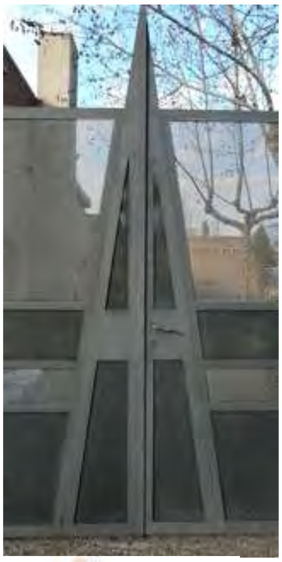
$P=2\cdot 10\cdot\sqrt{5}=44{,}72$ cm, es decir, el mismo resultado que nos dio directamente en el ordenador.

MATEMÁTICAS UTILIZADAS

- Cambios de unidades de longitud y área.
- Semejanza de figuras. Relaciones entre lados y áreas.
- Calculo de áreas y perímetros de polígonos, relacionándolos con los de otros fáciles de calcular.
- Teorema de Pitágoras.
- Expresiones algebraicas. Fórmulas.

VISTAZO 4 – TRIÁNGULOS EN VALLA(dolid) [i] [k]





Todo el recinto del instituto esta vallado con una verja metálica que fue colocada no hace mucho, unos siete años. El periscopio matemático se ha fijado en los triángulos que la forman, todos los cuales son isósceles. Además de la función decorativa, en algunos están las puertas de acceso al centro.

Como actividad matemática nos planteamos calcular las medidas de los lados, la altura y los ángulos de cada uno de estos triángulos. Sin correr el riesgo de caernos sólo podíamos medir las bases y los ángulos que forman éstas con los otros lados, salvo para un pequeño triángulo amarillo formado al entrelazarse otros dos grandes; para éste sí es posible obtener todas las medidas: lado desigual (base B1), lados iguales (L1) y altura (H1). Los resultados fueron los siguientes: B1=16cm. L1=66cm. y H1=65,5 cm.

El ángulo formado por la base con el otro lado era el mismo en todos los triángulos: 83°. Por lo tanto, al ser los triángulos isósceles, sus tres ángulos miden: 83°, 83° y

$$180^\circ - (83^\circ + 83^\circ) = 180^\circ - 166^\circ = 14^\circ.$$

La igualdad de los ángulos implica que los triángulos son semejantes por lo que es posible calcular las medidas de todos sus elementos por semejanza con el triángulo amarillo. [3]

Dos triángulos que tienen los ángulos iguales, son semejantes y tienen sus lados homólogos proporcionales. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{h}{h'}$

Para facilitar los cálculos y no repetirlos tantas veces, hemos utilizado *la hoja de cálculo.* Con esta herramienta informática se calcula la razón de semejanza (r) entre el triángulo amarillo

[3] García, J., Beltrán, C. *Geometría y experiencias*. Alhambra Longman, S.A., 1994.

y cualquiera de los otros, dividiendo la medida de un lado o de la altura de uno de ellos entre la de su homólogo en el primero.

En la siguiente imagen hemos hecho un volcado de pantalla de los resultados obtenidos con la hoja de cálculo. Los pasos seguidos han sido:

1.- Introducir los datos del triángulo amarillo, B1, H1 y L1.

2.- Introducir el valor de la base B2 y calcular la razón de semejanza $r2 = \frac{B2}{B1}$. Copiar el mismo procedimiento para calcular r3 y r4.

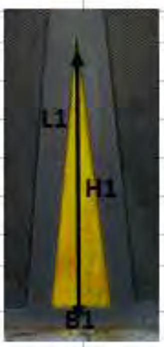
3.- Calcular H2 y L2, multiplicando H1 y L1 por r2. Copiar el mismo procedimiento para calcular H3, L3 y H4, L4.

4.- Los dos triángulos grandes, que al cortarse forman el amarillo, no tienen bien delimitada la longitud de su base. Para calcularla hemos sumado la longitud **h** y la altura obtenida para **H4**. A partir de este valor H5, hemos calculado r5, B5 y L5.

MEDIDA DE LOS LADOS Y ALTURA DE LOS TRIÁNGULOS ISÓSCELES

VERJA INSTITUTO NÚÑEZ DE ARCE

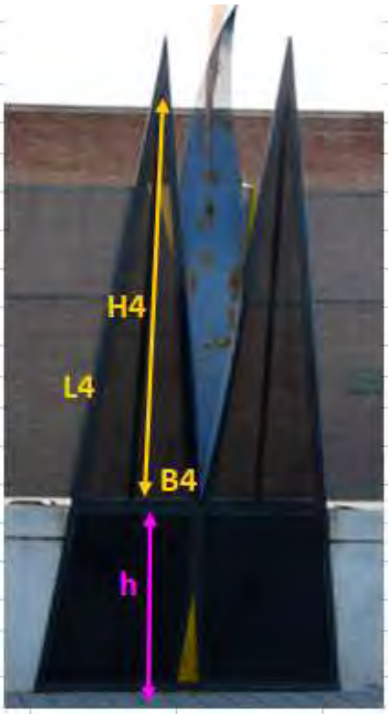
TRIÁNGULO AMARILLO		**TRIÁNGULO MEDIANO**		**TRIÁNGULO PUERTA**	
Base B1	16	Base B2	**46**	Base B3	**66**
		Razón r2	2,88	Razón r3	4,13
Altura H1	65,5	Altura H2	188,31	Altura H3	270,19
Lado L1	66	Lado L2	189,75	Lado L3	272,25



TRIÁNGULO DOBLE (I)		**TRIÁNGULO DOBLE (II)**	
Base B4	**78**	Base B5	107,31
Razón r4	4,88	Razón r5	6,71
Altura H4	319,31	Altura H5	**439,31**
Lado L4	321,75	Lado L5	442,67

altura **h=120 cm.**

H4 + h = 439,31



MATEMÁTICAS UTILIZADAS

- Triángulos isósceles, ángulos y lados.
- Suma de los ángulos de un triángulo.
- Semejanza de triángulos. Relaciones entre los lados.
- Calcular con la "hoja de cálculo". Repetición de operaciones con la opción "copiar" y "pegar".

CONCLUSIÓN

Después de echar estos cuatro "vistazos" a los alrededores del instituto, hemos confirmado que nuestro entorno está lleno de matemáticas y que sólo hay que saber descubrirlas basándose en los conocimientos matemáticos que se tengan, en nuestro caso los propios de tres alumnos de 2º de Secundaria.

Además, la realización del trabajo nos ha hecho descubrir muchas más cosas de nuestro entorno habitual: casa, edificios antiguos o modernos, parques, tiendas, calles… que pueden analizarse de forma matemática.

En el trabajo hemos aplicado las matemáticas al estudio de objetos reales y a plantear y resolver problemas con enunciados de temas cotidianos, cosa que echamos de menos en otros problemas cuyos enunciados carecen de esa cercanía y familiaridad.

También hemos tenido que aguzar el ingenio para medir elementos inaccesibles con instrumentos poco convencionales, es decir, obtener los datos necesarios para plantear y resolver el problema, a diferencia de los problemas usuales en el aula, donde los datos suelen proporcionársenos de antemano.

Otro aspecto interesante ha sido la búsqueda de información en libros y páginas webs y el registro de todas las referencias para hacer un trabajo de *"**es**de**libro**"*, pues hemos tenido que dar mucha importancia a las fuentes consultadas y su autoría.

La utilización adecuada de varios programas informáticos para resolver las actividades, ha supuesto un reto que, con un poco de ayuda, creemos haber superado con bastante éxito.

Lo más difícil ha sido dar forma y ordenar todo el material para redactar el trabajo y ajustarnos a las condiciones de las bases del concurso, pero con la ayuda de nuestra profesora creemos haberlo conseguido de modo satisfactorio. Además, si otros estudiantes lo leen con atención, tal vez aprendan cosas y se animen a buscar matemáticas a su alrededor.

En conclusión, aunque creíamos que era un instrumento exclusivo de los submarinos, hemos descubierto la utilidad de manejar en tierra firme nuestro "periscopio matemático", para desvelar la estructura matemática de numerosos elementos de la vida circundante, que antes pasaban inadvertidos, y, lo más gratificante de todo, apreciar inteligentemente la belleza matemática de cuanto nos rodea.

AUTORÍA DE LAS IMÁGENES

Todas las fotografías que aparecen en el trabajo han sido tomadas por la profesora, Inmaculada Fernández. Las restantes imágenes son impresiones de pantalla de los gráficos realizados con los programas informáticos utilizados en el desarrollo del trabajo.

BIBLIOGRAFÍA y PÁGINAS WEB CONSULTADAS

[1] Chamoso, J., Fernández, I., Reyes, E. *Burbujas de Arte y Matemáticas*. Nivola, 2009.

[2] Fernández, I., Reyes, E. *Geometría con el hexágono y el octógono*. Proyecto Sur de Ediciones, 2003.

[3] García, J., Beltrán, C. *Geometría y experiencias*. Alhambra Longman, S.A., 1994.

[4] García del Cid, L. *La sonrisa de Pitágoras*. DeBOLS!LLO, 2007.

[5] González Urbaneja, P.M. *Pitágoras el filósofo del número*. Nivola, 2001.

---

[a] http://es.wikipedia.org/wiki/Cuadrado_perfecto

[b] http://centros5.pntic.mec.es/ies.salvador.dali1/experien/numtrian.htm

[c] http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/05-06/PG-05-06-Reyes.pdf

[d] http://www.cs.us.es/cursos/rc/En%20busca%20del%20Mejor%20Folio.htm

[e] http://www.valladolid.es/modules.php?name=News&file=print&sid=824

[f] www.museopatioherreriano.org

[g] http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Pitagoras

[h] http://es.wikipedia.org/wiki/Rosa_de_los_vientos

[i] http://www.diputaciondevalladolid.es/cultura_edu/museos.shtml?idboletin=488&idseccion=2475

[j] http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/GeometriaInteractiva/IIICiclo/NivelIX/ConceptodeSemejanza/SemejanzadeTriangulos.htm

[k] http://maralboran.org/wikipedia/index.php/Semejanza_de_triángulos